Factorisation LDM et factorisation de Cholesky

AnaNum – Chapitre 3

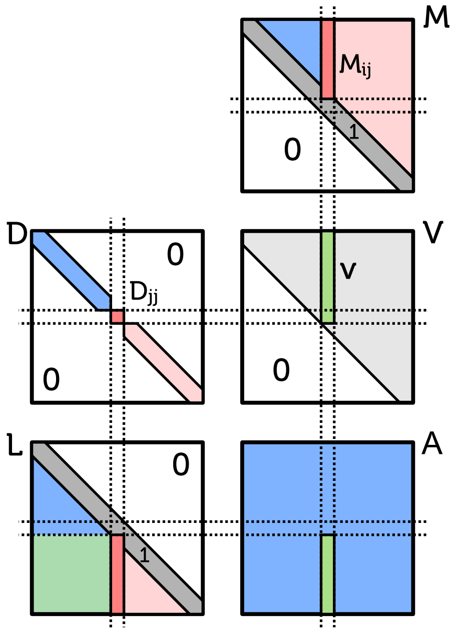
I. Factorisation LDM

$$A = LV = L\underset{D_{ii}=V_{ii}}{(DD^{-1})}V = LD\underbrace{(D^{-1}V)}_{M} = L\underbrace{DM}_{V}$$

L : tri inf unit

M : tri sup unit

D : diagonale



1. Maths

$\boxed{L(1{:}j, 1{:}j)v = A(1{:}j, j)}$ $\quad v = V(1{:}j, j)$

$\boxed{D(j, j) = v(j)}$ $\quad \boxed{M(i, j) = \dfrac{v(i)}{D(i, i)}}$

$$L(j + 1{:}n, 1{:}j)v = A(j + 1{:}n, j)$$

$$\boxed{L(j + 1{:}n, j) = \big(A(j + 1{:}n, j) - L(j + 1{:}n, j)v(1{:}j - 1)\big)/v(j)}$$

2. Codage

```
fonction [L,D,M] = factorisation_ldm(A)
pour j = 1 à n faire
      v(1:j) = tri_inf(L(1:j, 1:j), A(1:j,j))
      D(j,j) = v(j)
      pour i = 1 à j - 1 faire
            M(i,j) = v(i)/D(i,i)
      L(j+1:n, j) = A(j+1:n, j) - L(j+1:n, 1:j-1)v(1:j-1)/v(j)
```

3. Matrices symétriques : $A = LDL^T$

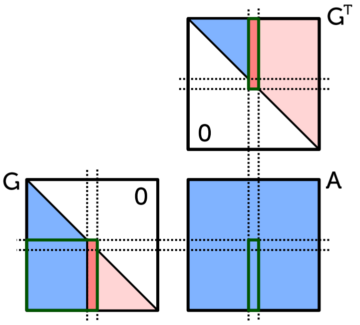
Si A est symétrique, $M = L^T$, donc on connait v sans résoudre de système.

$\boxed{\underset{1 \le i \le j-1}{v(i)} = D(i, i)L(j, i)}$ $\qquad \boxed{v(j) = A(j, j) - L(j, 1{:}j - 1)v(1{:}j - 1)}$

II. Matrices définies positives

$$A \text{ définie positive} \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ symétrique} \\ \forall\, x \neq 0,\ \ x^T A x > 0 \end{cases}$$

III. Factorisation de Cholesky : $A = GG^T$



A définie positive et $A = LDL^T \quad \Rightarrow \quad D_{ii} > 0\ \forall i \Rightarrow \quad \underset{G\text{:tri.inf. unique}}{A = GG^T}$

1. Calcul

$$\underbrace{L(j,j)L(j{:}n,j)}_{v} = A(j{:}n,j) - \underbrace{L(j,1{:}j-1)}_{=L^{T}(1:j-1,j)} L(j{:}n,1{:}j-1)$$

$$\Rightarrow\ \ L(j,j)^2 = v(1) \ \ \Rightarrow \quad \boxed{L(j{:}n,j) = v/\sqrt{v(1)}}$$

2. Codage

```
% version non optimisée
fonction L = Cholesky(A)
pour j = 1 à n faire
      v = A(j:n,j) - L(j,1:j-1)L(j:n,1:j-1)
      L(j:n,j) = v/sqrt(v(1))

% version optimisée 1 boucle
fonction A = Cholesky(A)
pour j = 1 à n faire
      A(j:n,j) = A(j:n,j) - A(j,1:j-1)A(j:n,1:j-1)
      A(j:n,j) = A(j:n,j)/sqrt(A(j,j))

% version optimisée 2 boucles
fonction A = Cholesky(A)
pour j = 1 à n faire
      si j > 1 alors
            pour k = 1 à j - 1 faire
                  A(j:n,j) = A(j:n,j) - A(j,k)A(j:n,k)
      A(j:n,j) = A(j:n,j)/sqrt(A(j,j))
```